



LOGARITMO

Definição

Uma outra forma de solucionar uma equação exponencial é utilizando logaritmo, visto que, dada uma equação do tipo $a^x = b$, com a e b reais positivos diferentes de 0 e b diferente de 1, chamamos o expoente de x de logaritmo de b na base a . A solução é dada da seguinte forma:

Logaritmando

Logaritmo

Base

$$\text{Log}_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

OBS: Quando um logaritmo é escrito sem a base, subentende-se que sua base é igual a 10.

Exemplos:

a) $\text{Log}_5 25$

Faremos $\text{log}_5 25 = x$:

$$\begin{aligned} 5^x &= 25 \\ 5^x &= 5^2 \\ \therefore x &= 2 \end{aligned}$$

Portanto, $\text{log}_5 25 = 2$.

b) $\text{Log } 1000$

Como não tem base, sabemos que é 10.

Faremos $\text{log } 1000 = x$:

$$\begin{aligned} 10^x &= 1000 \\ 10^x &= 10^3 \\ \therefore x &= 3 \end{aligned}$$

Portanto, $\text{log } 1000 = 3$.

Consequências da definição

1. Quando a base é igual ao logaritmando, o logaritmo sempre será igual a 1.

$$\log_a a = 1$$

2. Quando o logaritmando é 1, o logaritmo sempre será igual a 0.

$$\log_a 1 = 0$$

3. Um número b , elevado ao logaritmo de a na base b , é sempre igual a a .

$$b^{\log_b a} = a$$

4. Quando o logaritmando é uma potência, o expoente dela pode sair da potência para multiplicar a expressão.

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

Propriedades de logaritmos

1. Logaritmo do produto

Quando temos dois ou mais termos sendo multiplicados no logaritmando, o logaritmo será igual à soma dos logaritmos desses termos.

$$\text{Log}_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Exemplo:

- $\log_2(4 \cdot 8) = \log_2 32 = 5$
- $\log_2(4 \cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$

2. Logaritmo do quociente

Quando há um quociente entre dois termos no logaritmando, o logaritmo será igual a subtração dos logaritmos desses termos.

$$\text{Log}_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

Exemplo:

- $\log_3\left(\frac{81}{9}\right) = \log_3 9 = 2$
- $\log_3\left(\frac{81}{9}\right) = \log_3 81 - \log_3 9 = 4 - 2 = 2$

3. Mudança de base

Dado $\log_a b$ (log de b na base a), podemos mudar a base de a para c da seguinte forma:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Exemplo: Escreva $\log_3 7$ na base 10.

$$\log_3 7 = \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 3}$$

Exercícios

1. Calcule pela definição os seguintes logaritmos:

- a) $\log_4 16$
- b) $\log_3 81$
- c) $\log_5 125$
- d) $\log_2 32$
- e) $\log 100$

2. Se $\log_{10} 2 = 0,30$ e $\log_{10} 3 = 0,47$, calcule os seguintes logaritmos decimais:

- a) $\log_{10} 6$

- b) $\log_{10} 12$
 c) $\log_{10} 6,4$
 d) $\log_{10} 120$
 e) $\log_{10} 5,4$

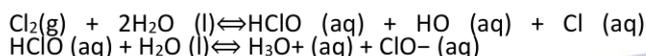
3. (CEFET-MG) o valor de $\log_{10} 2 + \log_{10} 20 + \log_{10} 25$ é:

- a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

4. Desenvolver aplicando as propriedades de logaritmos:

- a) $\log\left(\frac{ab}{c}\right)$
 b) $\log_3\left(\frac{a^3b^2}{c^4}\right)$

5. (Enem 2013) Uma das etapas do tratamento da água é a desinfecção, sendo a cloração o método mais empregado. Esse método consiste na dissolução do gás cloro numa solução sob pressão e sua aplicação na água a ser desinfetada. As equações das reações químicas envolvidas são:



$$pK_a = -\log K_a = 7,53$$

A ação desinfetante é controlada pelo ácido hipocloroso, que possui um potencial de desinfecção cerca de 80 vezes superior ao ânion hipoclorito. O pH do meio é importante, porque influencia na extensão com que o ácido hipocloroso se ioniza.

Para que a desinfecção seja mais efetiva, o pH da água a ser tratada deve estar mais próximo de

- a) 0. b) 5. c) 7. d) 9. e) 14.

6. Define-se o potencial hidrogeniônico (pH) de uma solução como o índice que indica sua acidez, neutralidade ou alcalinidade. É encontrado da seguinte maneira:

$$pH = \log \frac{1}{[H^+]}$$

Sendo H⁺ a concentração de íons de hidrogênio nessa solução. O pH de uma solução, em que $[H^+] = 1,0 \cdot 10^{-9}$, é:

- a) 9 b) 15 c) 27 d) 54

7. A acidez de frutas cítricas é determinada pela concentração de íons de hidrogênio. Uma amostra de polpa de laranja apresenta pH = 2,3. Considerando $\log 2 = 0,3$, calcule a concentração de íons de hidrogênio nessa amostra, em mol.L⁻¹.

- a) 0,001 b) 0,003 c) 0,005 d) 0,007

8. Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza a metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot (2,7)^{kt}$, onde A é a massa inicial e k uma constante negativa.

Considere 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$.

Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

- a) 27 b) 36 c) 50 d) 54 e) 100

9. Determine o tempo que leva para que 1000 g de certa substância radioativa, que se desintegra a taxa de 2% ao ano, reduza-se a 200 g. Utilize a seguinte expressão: $Q = Q_0 \cdot e^{-rt}$, em que Q é a massa da substância, r é a taxa e t é o tempo em anos.

10. A toxina botulínica (a mesma substância com que se produz o botox, usado no tratamento anti-rugas) vem sendo estudada pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) com o objetivo de se diminuir a intensidade dos movimentos feitos pelo estômago e tornar a digestão mais lenta, em casos de obesidade crônica. A toxina é produzida por determinadas bactérias, cuja reprodução é inibida por pH inferior a 4,5, por temperatura próxima a 100° C e pela presença de nitritos e nitratos como aditivos.

Sendo assim, para produzir a toxina botulínica, em um meio de cultivo dessas bactérias, a concentração de íons H⁺ deve estar entre

- a) 10^{-3} e 10^{-4} mol/L.
 b) 10^{-1} e 10^{-2} mol/L.
 c) 0 e 10^{-4} mol/L.
 d) 10^{-5} e 10^{-6} mol/L.

11. (CESPE – 2012)

Em 2013, comemoram-se 110 anos do recebimento do prêmio Nobel por Svante Arrhenius, cientista que investigou as propriedades condutoras das dissoluções eletrolíticas. Em sua teoria ácido-base, o cientista baseou-se no fato de substâncias ácidas, tais como H₂SO₄, CH₃COOH, HCl e HClO₄, ionizarem-se em solução aquosa e fornecerem íons hidrogênio (H⁺). De modo semelhante, as bases como o NaOH e o KOH também se dissociam em solução aquosa e produzem ânions hidroxila (OH⁻).

Considerando essas informações, julgue os próximos itens. Em uma solução de hidróxido de sódio com pH = 12, a razão entre as concentrações molares dos íons H⁺ e dos íons OH⁻ ($[H^+]/[OH^-]$) é igual a 6.

- () Certo () Errado

12. (VUNESP – 2017) Considere a tabela, que apresenta indicadores ácido-base e seus respectivos intervalos de pH de viragem de cor.

Indicador	Intervalo de pH de viragem	Mudança de cor
1. púrpura de m-cresol	1,2 – 2,8	vermelho – amarelo
2. vermelho de metila	4,4 – 6,2	vermelho – alaranjado
3. tornassol	5,0 – 8,0	vermelho – azul
4. timolftaleína	9,3 – 10,5	incolor – azul
5. azul de épsilon	11,6 – 13,0	alaranjado – violeta

Para distinguir uma solução aquosa 0,0001 mol/L de HNO₃ (ácido forte) de outra solução aquosa do mesmo ácido 0,1 mol/L, usando somente um desses indicadores, deve-se escolher o indicador

- a) 1 b) 4 c) 2 d) 3 e) 5

13. A uma solução aquosa de 100 mL de ácido clorídrico (HCl) de concentração 1 mol.L⁻¹ foram adicionados 400 mL de uma solução aquosa de hidróxido de sódio (NaOH) de concentração 0,75 mol.L⁻¹.

Considerando que:

- a solução básica foi parcialmente neutralizada pela solução do ácido;
 - o ácido clorídrico é um ácido forte ($\alpha=100\%$);
 - o hidróxido de sódio é uma base forte ($\alpha=100\%$).
- O pH da mistura resultante dessa reação de neutralização é

Dado: $\log 4 = 0,60$

- a) 13,6
 b) 11,4
 c) 9,8
 d) 7,5
 e) 4,3

14. O mineral calcita, CaCO₃, é um dos principais constituintes do mármore. Esse mineral pode ser dissolvido com ácidos, porque ocorre a seguinte reação:



Considerando uma solução de ácido clorídrico cujo pH = 0, o volume dessa solução, em mL, necessário para dissolver 1,0 g de CaCO₃ é de

Massa molar do CaCO₃ = 100 g.mol⁻¹

- a) 10. b) 20. c) 30. d) 40. e) 50.

15. (UECE-CEV) O hidróxido de potássio é utilizado para a produção de biodiesel, de sabões moles, como eletrólito e na identificação de fungos. Para produzir um determinado sabão, um estudante necessitava de uma solução do referido hidróxido com pH igual a 12. Para prepará-la, dissolveu uma certa massa em água até o volume de 100 mL. A massa de hidróxido utilizada foi

ELEMENTO QUÍMICO	NÚMERO ATÔMICO	MASSA ATÔMICA
H	1	1,0
C	6	12,0
N	7	14,0
O	8	16,0
F	9	19,0
Mg	12	24,3
Cl	17	35,5
K	19	39,0
Ca	20	40,0
Br	35	79,9
Ag	47	107,9
I	53	126,9

a) 0,056g b) 0,112g c) 0,224g d) 0,28g

16. Dispõe-se de 2 litros de uma solução aquosa de soda cáustica que apresenta pH 9. O volume de água, em litros, que deve ser adicionado a esses 2 litros para que a solução resultante apresente pH 8 é
a) 2 b) 6 c) 10 d) 14 e) 18

17. Volumes iguais a 100 mL das bases fortes NaOH e KOH, ambas na concentração de $0,100 \text{ mol L}^{-1}$, são misturados a 105 mL de solução de ácido sulfúrico $0,100 \text{ mol L}^{-1}$. O volume da mistura foi levado a 1000 mL com água. Considerando a dissociação total do NaOH e do KOH e a ionização total do ácido sulfúrico em água (ou seja: $\text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow 2\text{H}^+ + \text{SO}_4^{2-}$), o pH da solução aquosa final é
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

GABARITO

1. a) 2

1. b) 4

1. c) 3

1. d) 5

1. e) 2

2. a) 0,77

2. b) 1,07

2. c) 0,80

2. d) 2,07

2. e) 0,73

3. (A)

4. a) $\log a + \log b - \log c$

4. a) $3 \times \log_3 a + 2 \times \log_3 b - 4 \times \log_3 c$

5. (B)

6. (A)

7. (C)

8. (E)

9. 80,47

10. (D)

11. Errado

12. (A)

13. (A)

14. (B)

15. (A)

16. (E)

17. (C)

Matemática